# Szakmai beszámoló

OTKA K-49516

A projekt keretében elért eredményeket egyrészt a 34 elemű közleményjegyzék tartalmazza, másrészt születtek még nem publikált eredmények is. A fontosabbnak tartott eredményeket (van közöttük megjelent és benyújtott) soroljuk fel az alábbiakban.

Hatvani László (társszerzők: Bánhelyi Balázs, Csendes Tibor, Garay Barna) elsőként bizonyították súrlódásos ingamozgást külső periodikus erő hatására leíró másodrendű differenciálegyenlet megoldásainak kaotikusságát. J. Hubbard (1999) numerikus vizsgálatok alapján fogalmazta meg az

$$x'' + 10^{-1}x' + \sin x = \cos t$$

egyenletre a problémát. Hatvani László társszerzőivel [SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 7(2008), 843-867] azt mutatta meg, hogy van megoldásoknak egy osztálya, amely kaotikus a következő értelemben. Minden $-1, 0, 1$-ből álló $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ végtelen sorozathoz van olyan megoldása az egyenletnek az adott osztályban, hogy bármely $k \in \mathbb{Z}$-hez $a_k = -1$ esetén ez a megoldás az inga azon mozgását írja le a $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$ időintervallumon, amely pontosan egyszer megy át az alsó pozíción az óramutató járásával megegyező irányban, $a_k = 1$ esetén az inga azon mozgását írja le a $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$ időintervallumon, amely pontosan egyszer megy át az alsó pozíción az óramutató járásával ellenkező irányban, míg az $a_k = 0$ esetben az inga nem megy át egyszer sem az alsó pozíción a $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$ időintervallumon. A bizonyítás a Mischaikow, Mrozek, Zgliczynski által kidolgozott topologikus indexet alkalmazza. Azonban a bizonyítást lényegesen leegyszerűsíti egy megfelelő átmenetgráf definiálása, amely lehetővé teszi a Brouwer-féle fixpont-tétel használatát a Conley-index helyett. A bizonyításban fontos szerepe van az intervallum-aritmetikán alapuló megbízható numerikus számításoknak is.

A nagyon egyszerűnek tűnő

$$x'' + a^2(t)x = 0$$

lineáris másodrendű számos megoldatlan probléma van. Egy $x_0$ megoldás kicsi, ha $\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0$. Ismert, hogy mindig van nemtriviális kis megoldás. Az Armellini–Tonelli–Sansone-tétel szerint minden megoldás kicsi, ha $a$ regulárisan tart a végtelenbe. Ennek érdekes általánosítását adta Hatvani László [Georgian Math. J. 14(2007), 269-278]. Azzal az esettel is foglalkozott, amikor $a(t) = a_k$, $t_{k-1} \le t < t_k$, ahol az $(a_k)$ sorozat adott és a $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ formulával definiált $(\tau_k)$ sorozat elemei független valószínűségi változók a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlással. A megoldások amplitudóinak majdnem biztosan nullához tartására, instabilitására adott elegendő feltételeket megjelenés alatt álló dolgozataiban:

L. Hatvani, A new method in stability theory of linear non-autonomous second order differential equations with step function coefficients, In: Advances in Math. Problems in Eng. Aerospace and Sci. (to appear).

L. Hatvani, Stochastic parametric resonace in a linear oscillator at square-wave modulation, In: Problems in Analytical Mechanics and Stability Theory (to appear).

Hatvani László és N. Guglielmi [Discrete Cont. Dyn. Syst. 20(2008), 911-926] holonóm mechanikai rendszerekre is vizsgálta a kis megoldások létezését. Ha az együtthatófüggvények lépcsősek, akkor a probléma diszkrét dinamikai rendszerre redukálható.

Az
$$x'' + a(t)|x'|^{\alpha}\,\mathrm{sign}(x') + f(x) = 0$$
nemlineáris oszcillátort vizsgálta Karsai János (és J.R. Graef [Discrete Cont. Dyn. Syst. 2005, 497-504; Nonlinear Oscillations, 8(2005), 186-200]) a szuperlineáris $\alpha \geq 1$ és a szublineáris $0 < \alpha < 1$ esetben. Megmutatták, hogy a két esetben a megoldások viselkedése nagyon különböző.

A projekt keretében sokat vizsgáltuk a
$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-r)) \tag{1}$$
egyenletet, ahol $\mu \geq 0$, $r > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$. Minden $\phi \in C = C([-r,0],\mathbb{R})$-re van egyetlen $x = x^{\phi} : [-r,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely differenciálható $(0,\infty)$-en, kielégíti (1)-et minden $t > 0$-ra, és $x|_{[-r,0]} = \phi$. Az $F(t,\phi) = x_t$, $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-r,0]$, relációk egy $F : [0,\infty) \times C \to C$ végtelen dimenziós szemidinamikai rendszert definiálnak. Az $A \subset C$ halmaz az $F$ globális attraktorának evezzük, ha $A$ kompakt, invariáns, és $A$ vonzza a $C$ minden korlátos részhalmazát. A vizsgálatok fő célja (1) globális attraktora szerkezetének a minél teljesebb leírása.

Tegyük fel, hogy $f' < 0$ és $f$ vagy alulról vagy felülről korlátos. Például a híres Wright-féle egyenlet ilyen. Linearizáljuk (1)-et a 0 fixpontban: a $(D_2F(t,0))_{t\geq 0}$ lineáris $C_0$-félcsoport generátorának spektruma megegyezik a $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda + \mu - f'(0)e^{-\lambda} \in \mathbb{C}$ karakterisztikus függvény zéróhelyeivel. Tegyük fel, hogy $2k$ pozitív valós részű sajátérték van. Jelölje $W_{lok}$ a hozzájuk tartozó lokális instabil sokaságot 0-ban. Legyen $W = F([0,\infty) \times W_{lok})$. A $W$ lezártja, a $\overline{W}$ halmaz része az $A$ globális attraktornak, amely létezik ez esetben. A

T. Krisztin and J.Wu, Global structures for delayed monotone feedback, 150 pages, submitted.

monográfiában megadjuk $\overline{W}$ finom szerkezetét. $\overline{W}$ tartalmazza a 0 egyensúlyi helyzetet, pontosan $k$ periodikus pályát: $\mathcal{O}_1, \ldots, O_k$, továbbá heteroklinikus pályákat 0 és a periodikus pályák között, és bizonyos periodikus pályák között. Definiáljuk a
$$C_j^0 = \{\phi \in \overline{W} : \text{ Van } x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ megoldás, amelyre } x_0 = \phi,\ \alpha(x) = \{0\},\ \omega(\phi) = \mathcal{O}_j\},$$
$$C_l^j = \{\phi \in \overline{W} : \text{ Van } x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ megoldás, amelyre } x_0 = \phi,\ \alpha(x) = \mathcal{O}_j,\ \omega(\phi) = \mathcal{O}_l\}$$
ún. öszekötő halmazokat, ahol $j, l \in \{1, \ldots, k\}$. Ekkor
$$\overline{W} = \{0\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{O}_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} C_j^0\right) \cup \left(\bigcup_{1\leq l<j\leq k} C_l^j\right).$$
Továbbá az összekötő halmazok $C^1$-sima részsokaságai a $C$ fázistérnek. Az $\mathcal{O}_j$ periodikus pályát definiáló megoldás szegmenseinek $2j-2$ vagy $2j-1$ előjelváltása van a $[-r,0]$ intervallumon, $j \in \{1, \ldots, k\}$. Ezen eredmények bizonyítása egyrészt hasonló az 1999-es

Krisztin–Walther–Wu monográfiában kidolgozottakhoz, másrészt új ötletek, módszerek is szükségesek. Az alkalmazott eszközökből: invariáns sokaságok, inklinációs lemmák, diszkrét Ljapunov függvények, Floquet együtthatók, transzverzalitás. Hangsúlyozzuk, hogy az $\mathcal{O}_1, \ldots, O_k$ periodikus pályák hiperbolicitása nem ismert, és ez komoly technikai nehézségeket okoz. Eredményünk egy korábbi változata periodikus pályák közötti heteroklinikus pályák létezésére Conley-indexet alkalmazott. Kiderült, hogy az egyszerűbb Brouwer-index is elegendő.

Az (1) egyenletet a $\mu = 0$, $f(x) = \alpha(e^x - 1)$, $\alpha > 0$ esetben Wright-egyenletnek is nevezik. Jelentős előrelépést értünk el E.M. Wright 1955-ből származó sejtésének az igazolásában, amely szerint $\alpha r < \pi/2$ esetén a 0 megoldás globálisan attraktív. A benyújtáshoz közeli állapotú

B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin and A. Neumaier, Global attractivity of the zero solution for Wright's equation, kézirat

dolgozat a sejtést a kérdéses $[3/2, \pi/2)$ intervallum 90%-ára igazolja.

A benyújtás előtt álló

T. Krisztin and G. Vas, Large periodic orbits for delayed monotone positive feedback, kézirat

dolgozat arra ad példát, hogy az (1) egyenletre az $f' > 0$ esetben nagy periodikus pályák is lehetnek, azaz nem feltétlenül vannak két szomszédos stabil egyensúlyi helyzet által meghatározott rendezési intervallumban.

Az (1) egyenletre vonatkozó eredménynek egy speciális rendszerre, gyűrűszerűen rendezett idegsejt-hálózatot modellező rendszerre analóg változatának kidolgozása folyamatban van.

Az (1) egyenletet vizsgálta Röst Gergely (és J. Wu [Proc. Roy. Soc. London Ser. A 463(2007), 2655-2669.]) nemmonoton $f$ esetére. Egy ún. unimodális $f$-re (azaz $f$ monoton növő egy maximumhelyig, majd monoton csökkenő) a globális attraktor létezését igazolták, és korlátot adtak az attraktorra. Attraktív intervallumokat konstruáltak, és elegendő feltételeket adtak arra, hogy minden megoldás belépjen abba az intervallumba, ahol $f' < 0$ teljesül, és így a monoton visszacsatolásra vonatkozó eredmények alkalmazhatók. Bizonyos heteroklinikus pályák létezését is igazolták. Az eredmények alkalmazhatók a Nicholson és a Mackey–Glass egyenletekre. A globális attraktorra kapott becslések élesek, ha a nemlineáris $f$-re az unimodális feltétel mellett az is teljesül, hogy a Scwarz-deriváltja negatív [E. Liz and G. Röst, Discrete Cont. Dyn. Syst., to appear].

Az

$$\frac{d}{dt}[x(t) - cx(t-s)] = -\mu x(t) + f(x(t-r))$$

alakú neutrális funkcionál-differenciálegyenletre a megoldások generikus konvergenciáját igazoltuk:

A. Borús and T. Krisztin, Monotone semiflows generated by neutral dely differential equations, benyújtva.

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = \gamma\,[a(t)x(t) + g(t, x(t-r))]$$

egyenletet, ahol $\gamma > 0$ paraméter, $a(t)$ és $g(t,x)$ $\omega$-periodikusak $t$-ben, $a(t) \leq 0$, $g(t,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} g(t,x) > 0$ (vagy $< 0$) minden $(t,x)$-re. Röst Gergely 2006-ban megvédett PhD értekezésének fő eredménye szerint ha $\omega = r$, akkor a $\gamma$ paraméter kritikus értékeire a periódusleképezésre nézve invariáns görbék bifurkálnak a 0 egyensúlyi helyzetből (Neimark–Sacker bifurkáció). A kibővített fázistérben ez invariáns tóruszok megjelenését jelenti. Ezen eredményeket rezonanciák esetére is kiterjesztette Röst Gergely.

Ha (1)-ben $r$ nem állandó, hanem állaptofüggő, pl. $x(t)$ függvénye, akkor nem triviális technikai nehézségek vetődnek fel az alaperedmények (létezés, egyértelműség, folytonos függés) bizonyításában és a kvalitatív vizsgálatokban (stabilitás, linearizálás, periodikus pályák, invariáns sokaságok, globális attraktor, Hopf-bifurkáció, stb.) egyaránt. Állapotfüggő késleltetésű egyenletek egy, a fentinél lényegesen bővebb osztályára a

F. Hartung, T. Krisztin, H.-O. Walther and J. Wu, Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications, Handbook of Differential Equations, ODE Vol. 3, Elsevier–North Holland, pp. 435-545, 2006.

könyvfejezet az első összefoglaló feldolgozása a témakörnek elsősorban a szerzők korábbi eredményei alapján. De fontos új eredményeket is tartalmaz: egy egységes keretben tárgyalhatók az addig ad hoc módon kezelt problémák. A dinamikai rendszerek elméletébe illeszthetők az állapotfüggő késleltetésű egyenletek, ha azokat egy alkalmas sokaságon vizsgáljuk. A linearizálás, a lokális invariáns sokaságok létezése azonban speciális nehézséget jelentenek a megoldásoperátor simaságának hiánya miatt. Különösen fontos a lokális bifrkációelméletben a centrális sokaságok simasága. Ezt tartalmazza $C^1$-simaságra [T. Krisztin, Fields Institute Communications 48(2006), 213-226.], az általános esetet bizonyítja:

T. Krisztin, Smooth center manifolds for FDEs with state-dependent delays, submitted.

Az alkalmazások szempontjából is fontos eredményeket ért el Röst Gergely: vírusok terjedését modellezték differenciálegyenletek segítségével; járványok visszaszorítására kidolgozandó stratégiák tervezésének elméleti alapjait igazolták a modellegyenletek vizsgálatával.

Összességében a 7 fős csoport kutatói tevékenységét eredményesnek mondható. Különböző okok miatt a csoport 3 tagjának aktivitása elmaradt a tervezettől. Bartha Máriát betegsége hátráltatta. Örvendetes viszont, hogy a projekt időtartama alatt több hallgatót sikerült a kutatómunkába bevonni. Röst Gergely 2006-ban védte meg PhD értekezését Krisztin Tibor témevezetésével. További 4 PhD hallgató dolgozik Hatvani László és Krisztin Tibor témavezetésével.

2007-ben sikeresen megrendeztük az 8th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, June 25-28, 2007) nemzetközi konferenciát.